EBook: Apuntes y Ejercicios Resueltos de Programación Lineal

www.gestiondeoperaciones.net

Libro de Apuntes para estudiantes de Investigación Operativa que considera la revisión de modelos de Programación Lineal en cuanto a su formulación y resolución.

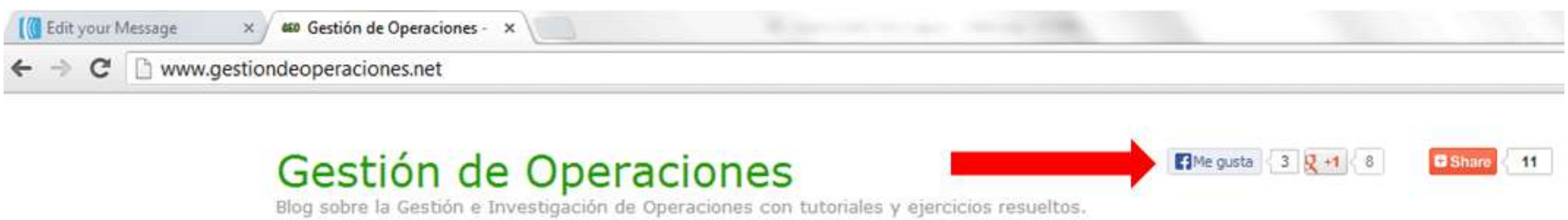
01/01/2015

PRÓLOGO

En el mes de Julio del año 2011 www.gestiondeoperaciones.net nace como un sitio de apoyo y consulta para estudiantes hispanos que cursan la asignatura de Investigación de Operaciones y Gestión de Operaciones. Desde entonces recibimos diariamente visitas y consultas de estudiantes de todo el mundo sobre las distintas temáticas de la Investigación de Operaciones y en especial de la Programación Lineal.

Luego de recibir innumerables sugerencias de los usuarios sobre la necesidad de contar con un Libro de Apuntes para facilitar el estudio de esta disciplina, se emprende una iniciativa para crear un EBook con ejercicios resueltos el cual se comienza a distribuir exitosamente a fines de Enero de 2012 a un precio simbólico de 1 Mensaje de Texto (SMS) el cual nos ayuda a financiar los gastos de mantención del sitio. ***Agradecemos de antemano a los usuarios ayudarnos a proteger los derechos de autor de este libro no publicándolo o distribuyéndolos a terceros sin previa autorización***

Adicionalmente hemos habilitado en el Blog una aplicación en la esquina superior derecha de la barra de navegación que permite compartir y recomendar nuestros contenidos en distintas redes sociales como Facebook y Google+ (y otras opciones disponibles en el botón "Share"). La aplicación se debería ver como muestra la imagen a continuación:



Estamos seguros que debes tener algún amigo(a), compañero de curso o colega que le puede resultar interesante y de ayuda la información de nuestro sitio. Muchas Gracias de antemano por tu apoyo! Estamos ansiosos por ver crecer nuestras estadísticas de popularidad con tu ayuda!.

Nos encantaría escuchar tus comentarios y testimonios del EBook escribiendo a ebook@gestiondeoperaciones.net. Encuéntranos también en **Twitter** (@geotutoriales) y Suscríbete a nuestro Canal en **Youtube** (geotutoriales) para revisar nuestros tutoriales. Esperamos sinceramente que este libro de apuntes sea un apoyo para tus estudios formales. Un cordial saludo:

GEO

El Equipo de Gestión de Operaciones

TABLA DE CONTENIDOS

UNIDAD 1: FORMULACIÓN Y RESOLUCIÓN GRÁFICA DE MODELOS DE PROGRAMACIÓN LINEAL EN 2 VARIABLES

Ejercicio 1: Un inversionista que tiene un presupuesto de US$10.000 está considerando 2 alternativas de inversión para el próximo año. La alternativa A tiene un retorno de un 10% anual y la alternativa B un retorno de un 15% anual. La desviación estándar de los retornos anuales (como indicador del riesgo de la inversión) según información histórica para la alternativa A y B han sido un 3% y 6%, respectivamente. El inversionista desea que su inversión total considere una desviación estándar máxima de un 5%. Asimismo ha establecido que al menos desea invertir US$2.000 en la alternativa A. Formule y resuelva gráficamente un modelo de Programación Lineal que permita maximizar los retornos del inversionista satisfaciendo las condiciones impuestas.

Variables de Decisión:
A: US$ a invertir en la alternativa A
B: US$ a invertir en la alternativa B

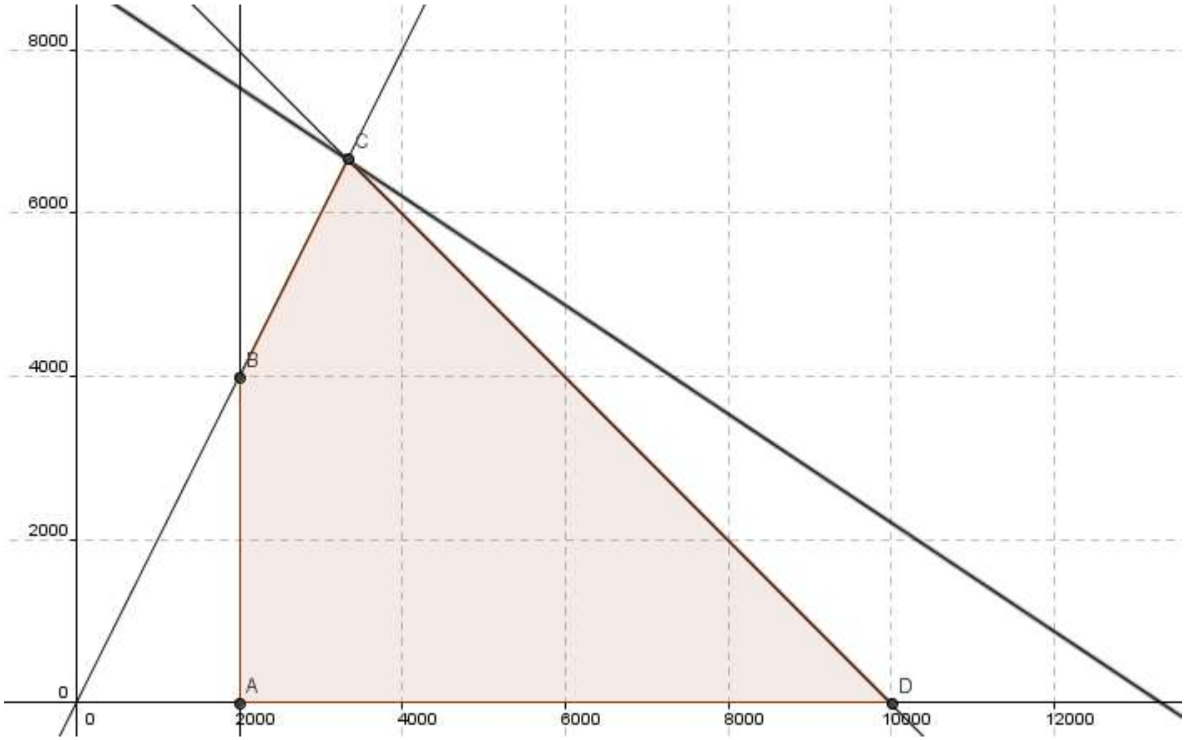
Función Objetivo:
Maximizar 0,10*A+0,15*B

Restricciones:

Máximo presupuesto	A+B <= 10.000	
Máxima desviación estándar[1]	(0,03*A+0,06*B)/(A+B) <= 0,05	
Mínimo a invertir en alternativa A	A >= 2.000	
No Negatividad	A >= 0	B >= 0

[1] Reduciendo la expresión es equivalente a -0,02*A+0,01*B <= 0

Una vez definido el modelo realizamos una representación gráfica para su resolución. Para ello utilizamos el programa **Geogebra**:



Una alternativa de resolución consiste en evaluar cada uno de los 4 vértices del dominio de soluciones factibles (área sombreada) y ver cuál de ellos representa un mayor valor en la función objetivo. Sin embargo, desplazando las curvas de nivel de la función objetivo se llega a una conclusión similar, donde se verifica que el vértice C es la solución óptima del problema. En dicho vértice las restricciones de máximo presupuesto y máxima desviación estándar se interceptan, de donde se obtiene que **A=US$3.333,3** y **B=US$6.666,6**. El valor óptimo es **V(P)=0,10*US$3.333,3+0,15*US$6.666,6=US$1.333,32** (aproximado).

Ejercicio 2: Una fábrica produce 2 tipos de ampolletas (conocidas también como bombillas): la ampolleta tradicional y la ampolleta de ahorro de energía. Según la capacidad del sistema productivo no se pueden fabricar más de de 400 ampolletas normales y no más de 300 ampolletas de ahorro energía en un día cualquiera. Adicionalmente la producción conjunta de estos 2 tipos de ampolletas no puede superar a las 500 unidades diarias. Las ampolletas tradicionales se venden a US$4,5 y las de ahorro de energía a US$6,0 cada una. Formule y resuelva gráficamente un modelo de Programación Lineal que permita maximizar la facturación diaria de la fábrica satisfaciendo las condiciones impuestas.

Variables de Decisión:

X1: Número de ampolletas (bombillas) tradicionales a producir diariamente.

X2: Número de ampolletas (bombillas) de ahorro de energía a producir diariamente.

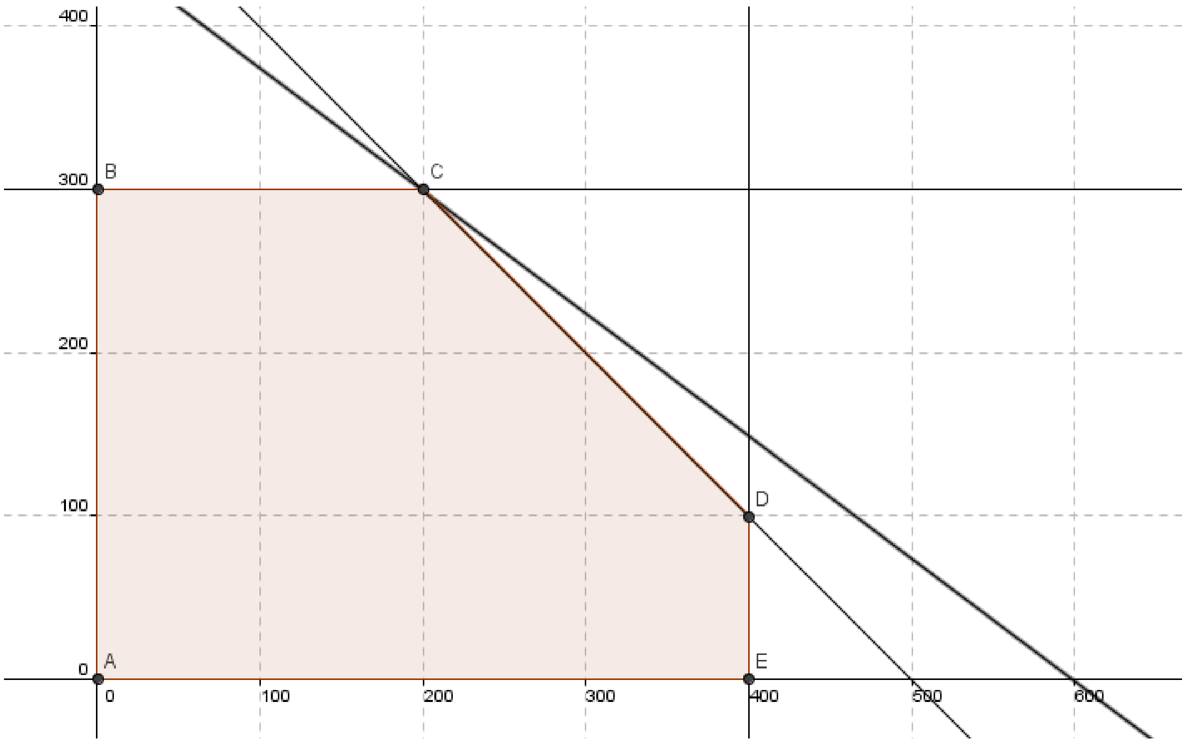
Función Objetivo:

Maximizar 4,5*X1+6,0*X2

Restricciones:

Máxima producción A.Tradicional	X1 <= 400
Máxima producción A.Ahorro Energía	X2 <= 300
Máxima producción conjunta	X1 + X2 <= 500
No Negatividad	X1 >= 0 X2 >= 0

Al graficar las restricciones se define el dominio de soluciones factibles (área sombreada) que permite resolver gráficamente el problema. Esto se logra al desplazar las curvas de nivel de la función objetivo en la dirección de mayor crecimiento y buscando el último punto donde éstas intercepten el dominio de soluciones factibles.



La solución óptima se alcanza en el vértice C cuyas coordenadas corresponde a la intersección de las restricciones de máxima producción de ampolletas de ahorro de energía y máxima producción conjunta. Luego **X1=200** y **X2=300**. El valor óptimo es **V(P)=US$4,5*200+US$6,0*300=US$2.700** que corresponde a la máxima facturación diaria.

Ejercicio 3: Una empresa de consumo masivo desea programar sus campañas publicitarias para el mes de Marzo de 2012, contando con un presupuesto para estos efectos de US$100.000. Para ello vamos a considerar que sólo existen 2 alternativas posibles para realizar publicidad: Radio o TV. Cada minuto de anuncio en Radio permite llegar a 10.000 potenciales clientes con un costo de US$300. Por otra parte cada minuto de anuncio en TV permite llegar a 400.000 potenciales clientes con un costo de US$5.000. La empresa desea alcanzar con sus campañas de publicidad al menos a 5.000.000 de potenciales clientes. Adicionalmente el Departamento de Marketing ha sugerido que por razones estratégicas es necesario realizar al menos 50 minutos de publicidad en Radio, sin embargo, el dinero que se destine a esa alternativa no puede ser superior al 30% del total del dinero utilizado. Formule y resuelva gráficamente un modelo de Programación Lineal que permita determinar la política de publicidad de costo mínimo además de satisfacer las condiciones impuestas.

Variables de Decisión:
X1: Minutos de publicidad en Radio a contratar durante el mes de Marzo de 2012.
X2: Minutos de publicidad en TV a contratar durante el mes de Marzo de 2012.

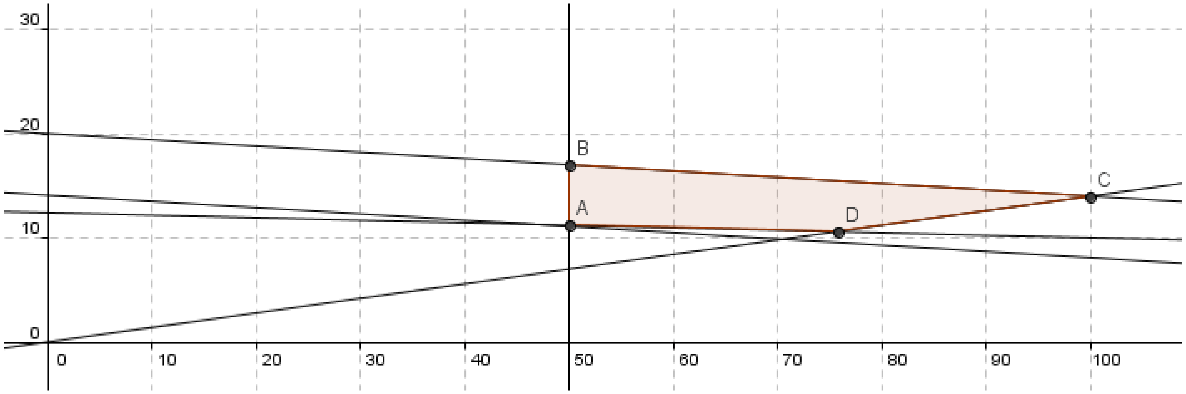
Función Objetivo:
Minimizar 300*X1+5.000*X2

Restricciones:

Mínimo impacto (clientes potenciales)	10.000*X1+ 400.000*X2 >= 5.000.000
Presupuesto Mensual	300*X1 + 5.000*X2 <= 100.000
Mínimo minutos en Radio	X1 >= 50
Mínimo gasto en Radio[2]	(300*X1)/(300*X1+5.000*X2) <= 0,30
No Negatividad	X1 >= 0 X2 >= 0

[2] Reduciendo la expresión es equivalente a 210*X1-1.500*X2 <= 0

Al graficar el problema se determina que la solución factible que proporciona el menor valor en la función objetivo corresponde al vértice A, donde se interceptan las restricciones de mínimo impacto (clientes potenciales) y mínimo minutos en Radio. La solución óptima por tanto es **X1=50[min]** y **X2=11,25[min]** [3] con valor óptimo **V(P)=US$300*50+US$5.000*11,25=US$71.250**.



[3] Una solución fraccionaria para una variable de decisión es admisible en los modelos de Programación Lineal.

UNIDAD 2: ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD EN PROGRAMACIÓN LINEAL UTILIZANDO EL MÉTODO GRÁFICO

Una vez resuelto un modelo de programación lineal resulta de interés determinar el impacto en los resultados (principalmente solución óptima y/o valor óptimo) ante variaciones en los parámetros o datos del modelo, sin la necesidad de resolver nuevamente el problema. Esta instancia se conoce como análisis de sensibilidad o postoptimal.

En los cursos de Investigación de Operaciones generalmente se aborda lo anterior en primera instancia a través de la resolución gráfica, debido a que los conceptos que se presentan en un modelo de 2 variables son extensibles para problemas de mayor tamaño.

A continuación presentaremos el análisis de sensibilidad utilizando el método gráfico y tomando como referencia los ejemplos abordados en la Unidad 1.

Intervalo de Variación de los Coeficientes de la Función Objetivo que conservan la actual Solución Óptima:

Consideremos el Ejercicio 2 cuya solución función objetivo de maximización es f(X1,X2)=4,5*X1+6,0*X2, con solución óptima X1=200 y X2=300. Nos interesa determinar en qué intervalo puede variar el coeficiente asociado a la variable X1 en la función objetivo (actualmente C1=4,5) de modo que se conserve la actual solución óptima. Notar que en la solución del problema las restricciones de máxima producción de ampolletas de ahorro de energía y máxima producción conjunta se interceptan, es decir, son restricciones activas[4] en el óptimo.

[4] Una restricción activa en el óptimo es aquella que se cumple en igualdad al ser evaluada en la solución óptima del problema.

La pendiente de la restricción de máxima producción de ampolletas de ahorro de energía es 0. Del mismo modo la pendiente de la restricción de máxima producción conjunta es -1. Luego se conserva la actual solución óptima del problema (vértice C) si la pendiente de la función objetivo[5] sigue variando entre las pendientes de las restricciones activas en el óptimo.

$$-1 \leq -C1/C2 \leq 0$$

Multiplicando por -1 y luego reemplazando C2 por 6,0 (su actual valor) tenemos que si C1varía en el intervalo entre [0,6] se conserva la actual solución óptima del problema. En particular si C1=0 se generan infinitas soluciones óptimas (tramo entre los vértices B y C); si C1=6 el tramo de soluciones óptimas es entre los vértices C y D.

Siguiendo el mismo procedimiento y conservando C1 en 4,5 (su valor actual) se determina que el intervalo de variación para el parámetro C2 que conserva la actual solución óptima es entre [4,5,+∞[.

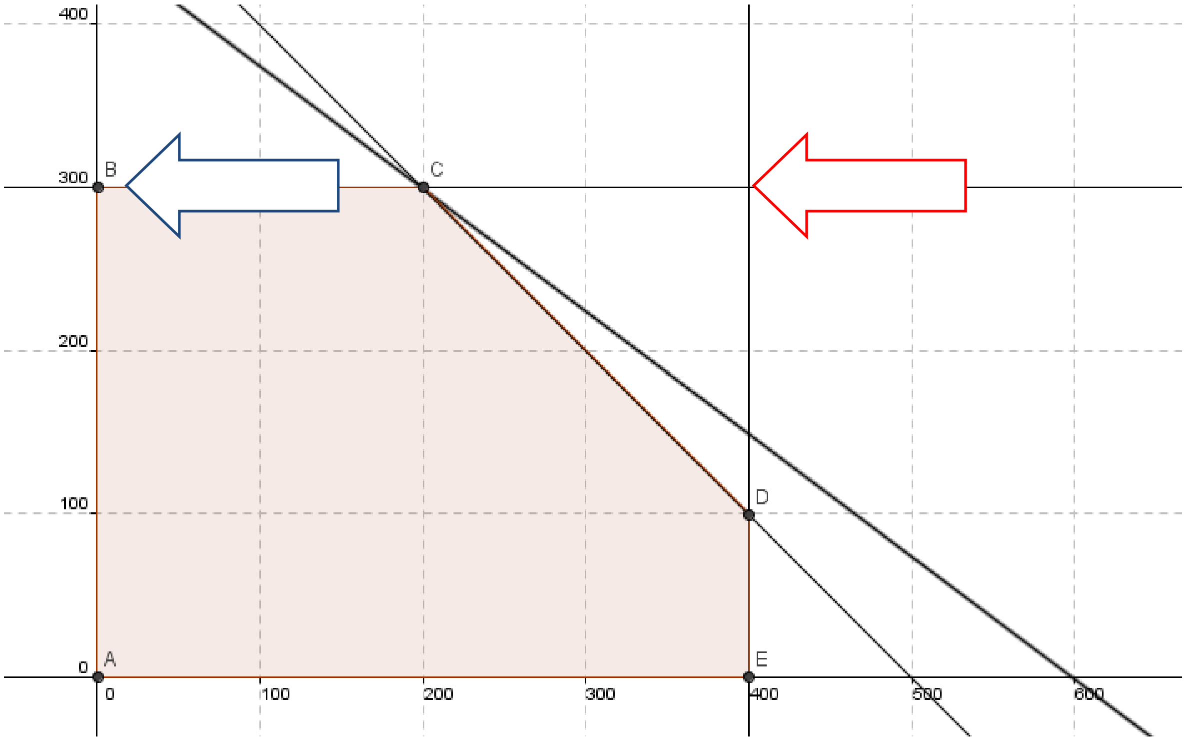
Tasa de Cambio del Valor Óptimo ante la modificación del lado derecho de una restricción (Precio Sombra):

El precio sombra de una restricción consiste en una tasa de cambio del valor óptimo ante una modificación del lado derecho o recurso de una restricción. Se asume que el resto de los parámetros del modelo permanece constante.

Consideremos nuevamente el Ejemplo 2, asumiendo que la fábrica desea evaluar el impacto en los ingresos diarios si logra aumentar la capacidad máxima de producción conjunta de 500 a 600 unidades. Utilizando el concepto de precio sombra podemos responder a lo anterior sin la necesidad de resolver nuevamente el problema. Para ello debemos analizar cuál es el aumento permisible y disminución permisible para el actual valor del lado derecho (b3=500) de modo

[5] Sea la función objetivo: f(X1,X2)=C1*X1+C2*X2, su pendiente es –C1/C2 con C2≠0

que la solución óptima del problema se siga encontrando con las actuales restricciones activas en el óptimo. Para ello consideremos nuevamente la resolución gráfica de dicho problema:



El aumento permisible para el valor del lado derecho de la restricción que permite mantener las actuales restricciones activas en el óptimo se alcanza en la intersección de las restricciones de máxima producción de ampolletas tradicionales y máxima producción de ampolletas de ahorro de energía. Esto corresponde a la coordenada (X1,X2)=(400,300) destacada por la flecha color rojo.

La disminución permisible para el valor del lado derecho de la restricción que permite mantener las actuales restricciones activas en el óptimo se alcanza en la intersección de las restricciones de máxima producción de ampolletas de ahorro de energía y la restricción de no negatividad para las ampolletas tradicionales. Esto corresponde a la coordenada (X1,X2)=(0,300) destacada por la flecha color azul.

Con la información anterior determinamos el precio sombra de la restricción de máxima producción conjunta:

$$\Pi_3 = \frac{z(400{,}300) - z(0{,}300)}{b_3^* - b_3} = \frac{3.600 - 1.800}{700 - 300} = 4{,}5$$

El precio sombra es igual a 4,5 unidades monetarias, lo cual es válido en la medida que el valor del lado derecho (b3) varíe en el intervalo entre [300,700]. Notar que el actual valor del lado derecho es 500 y pertenece a dicho intervalo.

Por tanto un aumento de 100 unidades en el lado derecho está contenido en el intervalo donde el precio sombra es válido y en consecuencia podemos utilizar el precio sombra para poder determinar el nuevo valor óptimo sin la necesidad de resolver nuevamente el problema. El nuevo valor óptimo es: **V(P)=US$2.700+(600-500)*US$4,5=US$3.150**.

Referencia:

http://www.gestiondeoperaciones.net/programacion_lineal/como-calcular-graficamente-el-precio-sombra-de-una-restriccion/

UNIDAD 3: RESOLVER UN MODELO DE PROGRAMACIÓN LINEAL CON SOLVER DE EXCEL

Solver® es un complemento de Excel que nos permite resolver modelos de optimización a través de una interfaz intuitiva. Para poder usar dicho complemento se debe activar en nuestra planilla de cálculo. Como referencia se puede consultar el siguiente tutorial en Internet: **Instalación Solver de Excel utilizando Microsoft Office 2003 y 2007**.

Se recomienda visitar el siguiente tutorial para una descripción detallada de cómo **Resolver un modelo de Programación Lineal con Solver de Excel**. No obstante, para ejemplificar su uso, implementaremos el Ejemplo 2 descrito en la Unidad 1.

Función Objetivo:

Maximizar 4,5*X1+6,0*X2

Restricciones:

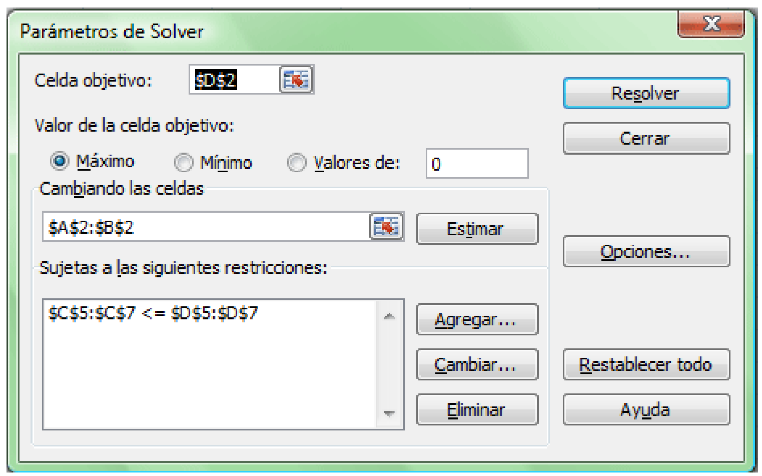
Máxima producción A.Tradicional	X1 <= 400	
Máxima producción A.Ahorro Energía	X2 <= 300	
Máxima producción conjunta	X1 + X2 <= 500	
No Negatividad	X1 >= 0	X2 >= 0

Paso 1: En una planilla de cálculo definimos la estructura del problema. Con color amarillo las celdas que serán las variables de decisión. En color verde las celdas que contienen fórmulas: función objetivo y lado izquierdo de las restricciones.

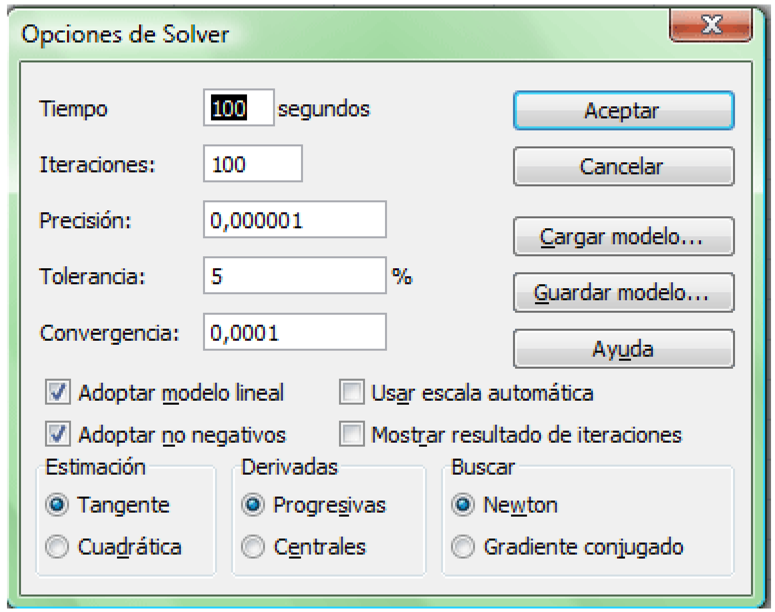
D2 f_x =SUMAPRODUCTO(A3:B3;A2:B2)

	A	B	C	D	E
1	X1	X2		F.OBJETIVO	
2				0	
3	4,5	6			
4			L.IZQ	L.DER	
5	1	0	0	400	
6	0	1	0	300	
7	1	1	0	600	

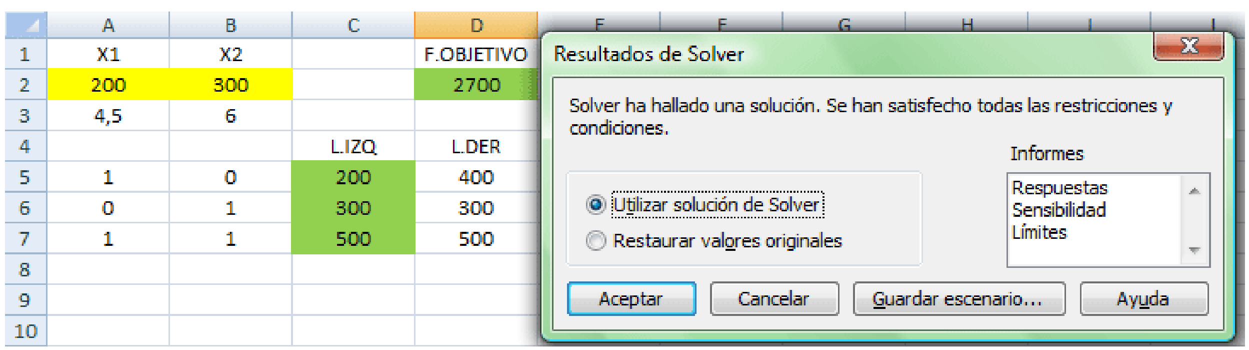
Paso 2: Se implementa el problema en la interfaz de Solver, definiendo la celda que contiene la función objetivo, el objetivo (máximo), cambiando las celdas (rango de las variables de decisión) y las restricciones.



Paso 3: En la pantalla anterior se selecciona “Opciones”, para luego habilitar las opciones “Adoptar modelo lineal” y “Adoptar no negativos”. Finalmente se selecciona “Aceptar” y “Resolver”.

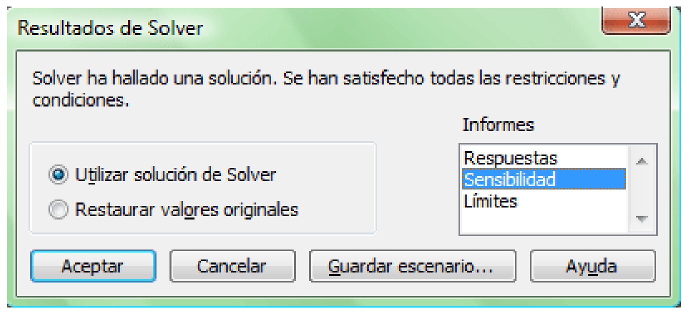


Paso 4: Se obtienen los resultados del modelo que verifica lo alcanzado en la resolución gráfica.



UNIDAD 4: INTERPRETACIÓN DE LOS INFORMES DE SENSIBILIDAD OBTENIDOS CON SOLVER DE EXCEL

Los resultados descritos sobre el análisis de sensibilidad o postoptimal descrito en la Unidad 2 se pueden obtener a través de los informes de sensibilidad de Solver. Para ello una vez obtenidos los resultados del modelo se debe seleccionar el informe de “Sensibilidad” y luego seleccionar “Aceptar”.



El informe de Sensibilidad se cargará en una nueva pestaña u hoja de nuestra planilla de cálculo:

Celdas cambiantes

Celda	Nombre	Valor Igual	Gradiente reducido	Coeficiente objetivo	Aumento permisible	Aumento permisible
A2	X1	200	0	4,5	1,5	4,5
B2	X2	300	0	6	1E+30	1,5

Restricciones

Celda	Nombre	Valor Igual	Sombra precio	Restricción lado derecho	Aumento permisible	Aumento permisible
C5	L.IZQ	200	0	400	1E+30	200
C6	L.IZQ	300	1,5	300	200	200
C7	L.IZQ	500	4,5	500	200	200

Un primer elemento a considerar es la última columna de la imagen anterior donde dice “Aumento” cuando debiese decir “Disminución”. Para resaltar esta situación se ha marcado dicha palabra con color rojo.

El informe de sensibilidad corresponde al Ejemplo 2 de modo de poder contrastar la información proporcionada por Solver con los resultados de sensibilidad obtenidos gráficamente y analizados en la Unidad 2.

En la sección **“Celdas cambiantes”** se presenta el análisis de los parámetros de la función objetivo. El “Coeficiente objetivo” corresponde al valor actual del parámetro. El “Aumento permisible” y la “Disminución permisible” establecen un rango de variación para el valor del parámetro que conserva la actual solución óptima. Con esto se comprueba que si C1$\in$[4,5-4,5;4,5+1,5]➔[0,6] se mantiene la solución óptima. De forma análoga se concluye que si C2 $\in$[6,0-1,5;6,0+∞]➔[4,5,+∞[se mantiene la solución óptima.

En **“Restricciones”** se puede obtener el precio sombra de las restricciones. Notar que el precio sombra de la restricción 3 (máxima producción conjunta) es 4,5; “Restricción lado derecho” corresponde al valor actual del lado derecho y los valores en las columnas de “Aumento permisible” y “Disminución permisible” nos permiten determinar el rango de variación para el lado derecho que mantiene la geometría del problema. En consecuencia, el intervalo para b3 es [500-200,500+200]➔[300,700].

Referencias:

- http://www.gestiondeoperaciones.net/programacion_lineal/interpretacion-del-informe-de-sensibilidad-de-restricciones-de-solver/
- http://www.gestiondeoperaciones.net/programacion_lineal/interpretacion-del-informe-de-sensibilidad-de-celdas-cambiantes-de-solver/

El Método Simplex publicado por George Dantzig en 1947 consiste en un algoritmo iterativo que secuencialmente a través de iteraciones se va aproximando al óptimo del problema de Programación Lineal en caso de existir esta última.

El Método Simplex hace uso de la propiedad de que la solución óptima de un problema de Programación Lineal se encuentra en un vértice o frontera del dominio de puntos factibles (esto último en casos muy especiales), por lo cual, la búsqueda secuencial del algoritmo se basa en la evaluación progresiva de estos vértices hasta encontrar el óptimo. Cabe destacar que para aplicar el Método Simplex a un modelo lineal, éste debe estar en un formato especial conocido como **formato estándar** el cual definiremos a continuación.

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \\ \text{sa} \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ & \dots \quad \dots \quad \dots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \\ & x_i >= 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \text{y} \quad m <= n \end{aligned}$$

Matricialmente escrito como:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & c^T x \\ \text{s.a} \quad & Ax = b \\ & x >= 0 \end{aligned}$$

Como no todos los modelos de programación lineal están definidos en el formato estándar, es necesario realizar una serie de transformaciones previas antes de la aplicación del algoritmo. Estas transformaciones consisten generalmente en agregar variables de holgura y/o exceso, llevar la función objetivo al formato de minimización y realizar cambios de variables de ser necesario. Mayor información se puede encontrar en la sección dedicada al **Método Simplex** en nuestro sitio.

A continuación utilizaremos nuevamente el Ejemplo 2 para mostrar en detalle cómo llevar dicho problema al formato estándar, para luego realizar las iteraciones del método simplex que nos permitan llegar a la solución óptima y valor óptimo:

Formato Original:

Maximizar 4,5*X1+6,0*X2

S.A. X1 <= 400

X2 <= 300

X1 + X2 <= 500

X1 >= 0 X2 >= 0

Formato Estándar:

Minimizar -4,5*X1-6,0*X2

S.A. X1+X3 = 400

X2+X4 = 300

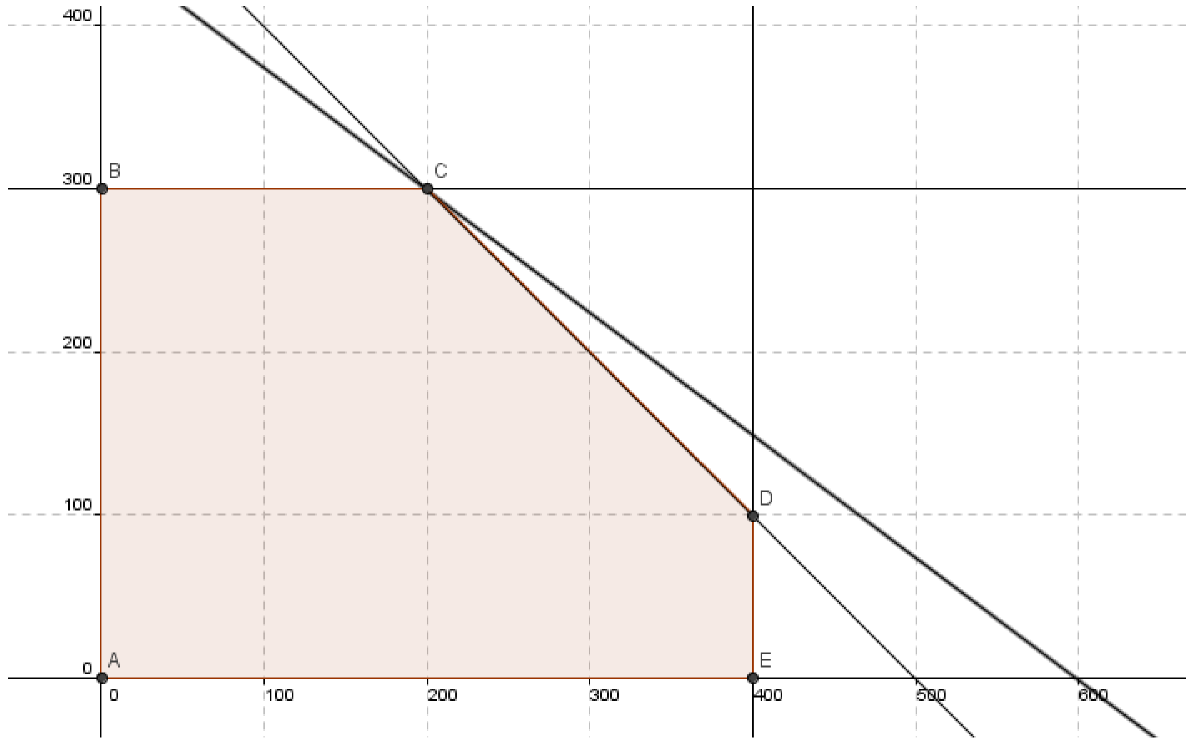
X1+X2+X5 = 500

X1,X2,X3,X4,X5 >= 0

En el ejemplo se multiplica la función objetivo por -1 para llevar ésta al formato de minimización. Luego se agregan las variables de holgura X3, X4, X5 a las restricciones 1, 2 y 3, respectivamente, de modo de generar ecuaciones. La tabla inicial del método simplex es:

X1	X2	X3	X4	X5	
1	0	1	0	0	**400**
0	1	0	1	0	**300**
1	1	0	0	1	**500**
-4,5	**-6,0**	**0**	**0**	**0**	**0**

En la tabla inicial X1 y X2 son variables no básicas (X1=X2=0) y X3, X4 y X5 son variables básicas (X3=400, X4=300, X5=500). Esta solución básica factible inicial corresponde al vértice A de la resolución gráfica:



Como al menos el costo reducido (última fila) de una variable no básica es negativo, esto implica que aún se puede seguir optimizando. El criterio general es considerar como variable que entra a la base aquella con el costo reducido más negativo. De esta forma se espera realizar un menor número de iteraciones para alcanzar la solución óptima[6]. En nuestro ejemplo X2 entra a la base. Luego se calcula el mínimo cuociente entre el valor de los lados derechos y los coeficientes estrictamente mayores a cero en la columna de X2 ➔ Min {300/1; 500/1} = 300 ➔X4 sale de la base. La posición donde se alcanza el mínimo cuociente se llama "pivote" el cual se ha marcado con color rojo en la tabla inicial.

[6] Este concepto se conoce como rapidez de convergencia del algoritmo.

Se realiza una iteración del método simplex ingresando X2 a la base, al mismo tiempo que X4 sale de la base. Las operaciones filas que permiten la actualización de la tabla se realizan desde la posición del pivote. Por ejemplo, multiplicando por -1 la fila 2 y sumando ésta a la fila 3. También multiplicando por 6 la fila 2 y sumando a la fila 4. La tabla resultante considera ahora a X2, X3 y X5 como variables básicas (X2=300, X3=400, X5=200) y X1 y X4 como variables no básicas (X1=X4=0) lo que corresponde al vértice B de la resolución gráfica.

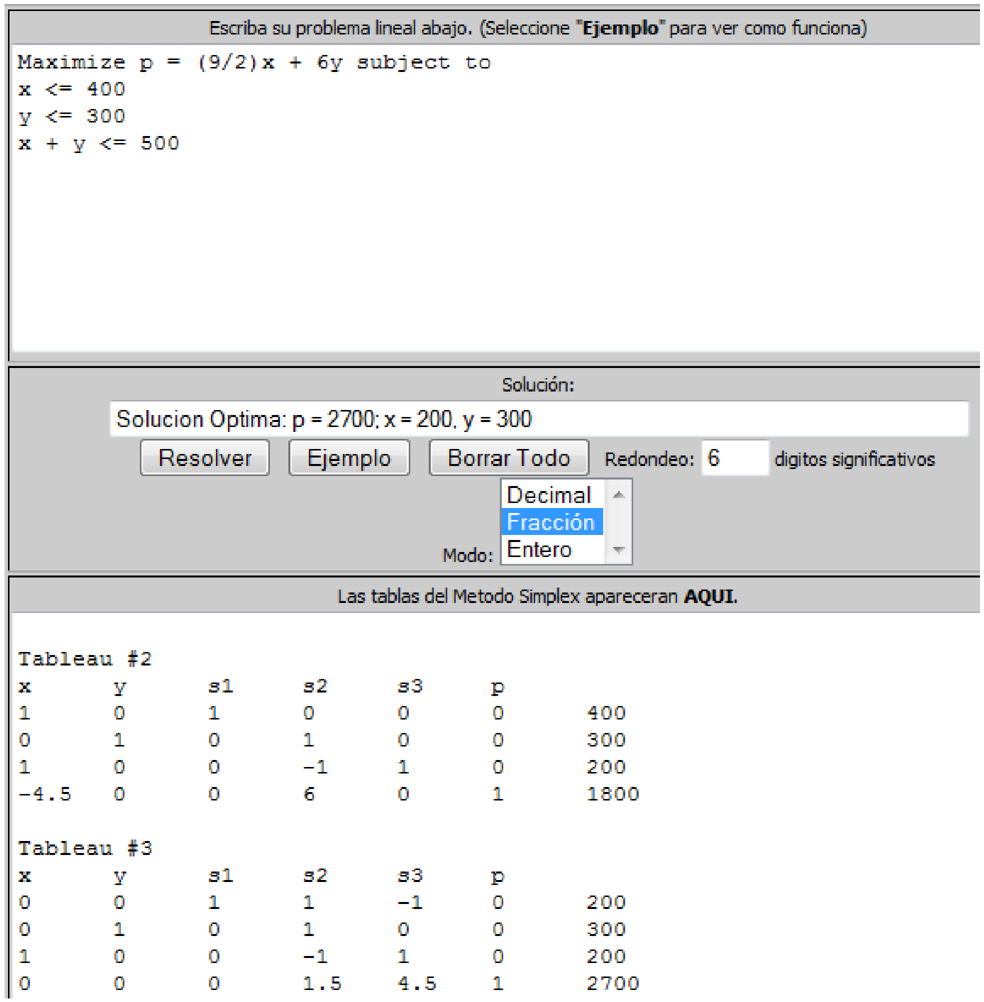
X1	X2	X3	X4	X5	
1	0	1	0	0	**400**
0	1	0	1	0	**300**
1	0	0	-1	1	**200**
-4,5	**0**	**0**	**6**	**0**	**1.800**

Es necesario realizar una nueva iteración dado que la variable no básica X1 tiene costo reducido negativo, por tanto X1 entra a la base. El mínimo cuociente es: Min {400/1; 200/1} = 200 ➔ X5 sale de la base. Se actualiza la tabla a través de operaciones filas desde el pivote.

X1	X2	X3	X4	X5	
0	0	1	1	-1	**200**
0	1	0	1	0	**300**
1	0	0	-1	1	**200**
0	**0**	**0**	**1,5**	**4,5**	**2.700**

Se ha alcanzado la solución óptima del problema dado que nos encontramos ante una solución básica factible, donde además los costos reducidos de las variables no básicas (X4 y X5) son mayores o iguales a cero. La solución óptima en las variables originales son: **X1=200**, **X2=300** (vértice C), con valor óptimo: **V(P)=2.700**. Esto corrobora la solución gráfica encontrada en la Unidad 1 y la resolución utilizando Solver de Excel descrito en la Unidad 3.

La aplicación de resolución del **Método Simplex** disponible en nuestra página web también permite comprobar los resultados obtenidos según se muestra a continuación[7]:


Escriba su problema lineal abajo. (Seleccione "**Ejemplo**" para ver como funciona)

```
Maximize p = (9/2)x + 6y subject to
x <= 400
y <= 300
x + y <= 500
```

Solución:

Solucion Optima: p = 2700; x = 200, y = 300

Resolver | Ejemplo | Borrar Todo | Redondeo: 6 digitos significativos

Modo: Decimal / Fracción / Entero

Las tablas del Metodo Simplex apareceran **AQUI**.

Tableau #2

x	y	s1	s2	s3	p	
1	0	1	0	0	0	400
0	1	0	1	0	0	300
1	0	0	-1	1	0	200
-4.5	0	0	6	0	1	1800

Tableau #3

x	y	s1	s2	s3	p	
0	0	1	1	-1	0	200
0	1	0	1	0	0	300
1	0	0	-1	1	0	200
0	0	0	1.5	4.5	1	2700

[7] No considerar los resultados de la columna bajo la letra “p”.

Es importante destacar que en la aplicación del método simplex en la tabla final podemos encontrar el precio sombra de las respectivas restricciones. Por ejemplo, la variable de holgura X5 tiene costo reducido de 4,5 unidades monetarias, que coincide con el precio sombra calculado gráficamente en la Unidad 2 y obtenido a través de los informes de sensibilidad de Solver. Adicionalmente si se busca determinar el intervalo de variación para el respectivo lado derecho que mantiene la geometría del problema, se puede seguir el procedimiento de **Análisis de Sensibilidad o Postoptimal** descrito en ProgramacionLineal.net.

Novedades!

El Método Simplex sin duda es el algoritmo de excelencia para resolver modelos de Programación Lineal y lo puedes instalar fácilmente en tu calculadora siguiendo unos sencillos pasos. Para ello te recomendamos tomar 5 minutos de tu tiempo y revisar los siguientes artículos publicados en el Blog de Gestión de Operaciones:

- Como instalar el Método Simplex en una calculadora Texas Instruments
- Cómo instalar el Método Simplex en una calculadora HP 48

Cuéntanos tu experiencia utilizando el Método Simplex en tu calculadora comentando en el Formulario de Contacto que está al final de cada artículo.

Saludos!
El Equipo de Gestión de Operaciones

UNIDAD 6: MÉTODO SIMPLEX DE 2 FASES

En la aplicación del método simplex no siempre se dispone de una solución básica factible inicial como la obtenida en el ejemplo de la Unidad 5 una vez que se lleva el problema a su forma estándar. En dichos casos es necesario aplicar una variante algorítmica que permita la resolución del modelo de programación lineal. Una alternativa en este contexto es el método simplex de 2 fases.

Consideremos el Ejemplo 1 resuelto gráficamente en la Unidad 1.

Formato Original:

Maximizar 0,10*A+0,15*B

S.A. A+B <= 10.000

-0,02*A+0,01*B <= 0

A >= 2.000

A >= 0 B >= 0

Formato Estándar:

Minimizar -0,10*A-0,15*B

S.A. A+B+H1 = 10.000

-0,02*A+0,01*B+H2 = 0

A – E3 = 2.000

A,B,H1,H2,E3 >= 0

Donde H1 y H2 son variables de holgura de las restricciones 1 y 2, respectivamente, y E3 es variable de exceso de la restricción 3. Si formamos una tabla inicial para el método simplex obtenemos:

A	B	H1	H2	E1	
1	1	1	0	0	**10.000**
-0.02	0.01	0	1	0	**0**
1	0	0	0	-1	**2.000**
-0.1	**-0.15**	**0**	**0**	**0**	**0**

Donde H1 es variable básica de la fila 1 (H1=10.000>=0) y H2 variable básica de la fila 2 (H2=0>=0). Si quisiéramos utilizar E1 como variable básica para la fila 3, es necesario multiplicar por -1 dicha fila, sin embargo, al realizar dicha transformación H3=-2.000, lo cual no define una solución básica factible para el método simplex.

En consecuencia aplicamos el **Método Simplex de 2 Fases** según lo descrito en nuestro sitio:

FASE 1: Se considera un problema auxiliar que resulta de agregar tantas variables auxiliares a las restricciones del problema, de modo de obtener una solución básica factible. Resolver por Simplex un problema que considera como función objetivo la suma de las variables auxiliares. Si el valor óptimo es cero, seguir a la Fase II, en caso contrario, no existe solución factible.

FASE 2: Resolver por Simplex el problema original a partir de la solución básica factible inicial hallada en la Fase I.

En nuestro ejemplo el problema de la Fase I es (X: variable auxiliar):

Minimizar X

S.A.
A + B + H1 = 10.000
-0,02*A + 0,01*B + H2 = 0
A – E3 + X = 2.000
A,B,H1,H2,E3,X >= 0

La tabla inicial asociada a la Fase I queda definida de la siguiente forma:

A	B	H1	H2	E1	X	
1	1	1	0	0	0	**10.000**
-0.02	0.01	0	1	0	0	**0**
1	0	0	0	-1	1	**2.000**
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**

Llevamos el costo reducido de X a cero:

A	B	H1	H2	E1	X	
1	1	1	0	0	0	**10.000**
-0.02	0.01	0	1	0	0	**0**
1	0	0	0	-1	1	**2.000**
-1	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**-2.000**

Ahora disponemos de una solución básica factible con H1=10.000, H2=0 y X=2.000, que satisfacen las condiciones de no negatividad. No obstante la variable no básica A tiene costo reducido negativo por tanto es necesario realizar una iteración del método simplex. Esto determina que A entra a la base. Luego aplicamos el criterio del mínimo cuociente para determinar la variable que deja la base: Min {10.000/1; 2.000/1} = 2.000 ➔ X sale de la base. Al actualizar la tabla se obtiene:

A	B	H1	H2	E1	X	
0	1	1	0	1	-1	**8.000**
0	0.01	0	1	-0.02	0.02	**40**
1	0	0	0	-1	1	**2.000**
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**

Donde las variables básicas satisfacen las condiciones de no negatividad (A=2.000, H1=8.000 y H2=40). Las variables no básicas (B, E1 y X) tienen costos reducidos mayores o iguales a cero. Adicionalmente el valor de la función objetivo es igual a cero, por tanto pasamos a la Fase 2.

Fase 2: Resolver por Simplex el problema original a partir de la solución básica factible inicial hallada en la Fase I. Para ello eliminamos la columna de la variable artificial X y actualizamos el vector de costos reducidos considerando la función objetivo original:

A	B	H1	H2	E1	
0	1	1	0	1	**8.000**
0	0.01	0	1	-0.02	**40**
1	0	0	0	-1	**2.000**
-0.1	**-0.15**	**0**	**0**	**0**	**0**

Antes de continuar con las iteraciones debemos formar la base. Para ello necesitamos llevar el costo reducido de la variable A a cero de modo que mantenga la estructura asociada a una variable básica. Para ello multiplicamos por 0,1 la fila 3 y la sumamos a la fila 4.

A	B	H1	H2	E1	
0	1	1	0	1	**8.000**
0	0.01	0	1	-0.02	**40**
1	0	0	0	-1	**2.000**
0	**-0.15**	**0**	**0**	**-0.1**	**200**

Al realizar la operación fila anterior la variable no básica B tiene costo reducido negativo. En consecuencia, seleccionamos B como la variable que entra a la base y luego calculamos el mínimo cuociente para determinar la variable que deja la base: Min {8.000/1; 40/0,01} = 4.000 ➔ H2 deja la base. Posteriormente se realiza una iteración del método simplex realizando operaciones fila desde la posición del pivote (celda color rojo).

A	B	H1	H2	E1	
0	0	1	-100	**3**	**4.000**
0	1	0	100	-2	**4.000**
1	0	0	0	-1	**2.000**
0	**0**	**0**	**15**	**-0.4**	**800**

Ahora E1 es la única variable no básica con costo reducido negativo por tanto ingresa a la base. El mínimo cuociente es inmediato debido a que existe sólo un coeficiente estrictamente mayor a cero en la columna de E1 ➔ H1 sale de la base.

A	B	H1	H2	E1	
0	0	1/3	-100/3	1	**4.000/3**
0	1	2/3	100/3	0	**20.000/3**
1	0	1/3	-100/3	0	**10.000/3**
0	**0**	**2/15**	**5/3**	**0**	**4.000/3**

Finalmente se alcanza la solución óptima del problema con **A=10.000/3** y **B=20.000/3**, con valor óptimo **V(P)=4.000/3** lo cual corrobora los resultados obtenidos gráficamente en la Unidad 1.

Te invitamos a seguir visitando nuestro sitio y encontrar artículos de distintas temáticas que te serán de ayuda para tus estudios. ¿Cómo buscar la información?. Te recomendamos visitar el siguiente link:

http://www.gestiondeoperaciones.net/como-comenzar